



Mihai Monea
Steluța Monea
Ioan Șerdean
Adrian Zanoschi

Bacalaureat 2027

MATEMATICĂ

M_științele naturii

M_tehnologic

_Teme recapitulative
_40 de teste, după modelul M.E.C.
(10 teste fără soluții)

Editura Paralela 45



Cuprins

Cuvânt-înainte	4
-----------------------------	---

Enunțuri Soluții

TEME RECAPITULATIVE

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică	5	239
2. Șiruri. Progresii	10	240
3. Funcții	15	241
4. Funcția de gradul I	21	242
5. Funcția și ecuația de gradul al II-lea	26	242
6. Vectori în plan	32	243
7. Elemente de trigonometrie și aplicații în geometrie	37	244

Clasa a X-a

1. Numere reale	43	246
2. Funcții și ecuații	47	247
3. Probleme de numărare și combinatorică	54	248
4. Matematici aplicate. Probabilități	58	248
5. Geometrie analitică	63	249
6. Numere complexe*	68	250
7. Probleme de sinteză din materia claselor IX-X	73	250

Clasa a XI-a

1. Matrice	80	252
2. Determinanți	88	253
3. Aplicații ale determinantilor în geometrie	93	253
4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale	97	254
5. Sisteme de ecuații liniare	103	255
6. Probleme de sinteză – algebră	110	256
7. Limite de funcții. Asimptote	115	260
8. Funcții continue	122	261
9. Derivata unei funcții	127	262
10. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor	134	263
11. Probleme de sinteză – analiză matematică	139	264

Clasa a XII-a

1. Legi de compoziție.....	144.....	268
2. Structuri algebrice. Morfisme	149.....	268
3. Polinoame	154.....	269
4. Probleme de sinteză – algebră.....	160.....	269
5. Primitive.....	165.....	272
6. Integrala definită	171.....	272
7. Aplicații ale integralei definite.....	176.....	273
8. Probleme de sinteză – analiză matematică.....	181.....	274

TESTE PENTRU BACALAUREAT, DUPĂ MODELUL M.E.**1. MODELE DE TESTE REZOLVATE**

PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT	188.....	279
--------------------------------------	----------	-----

2. MODELE DE TESTE PROPUSE

PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT	226
--------------------------------------	-----

<i>Bibliografie</i>	302
---------------------------	-----

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Tipuri speciale de raționament

Metoda reducerii la absurd: Pentru a demonstra o implicație de tipul: *Dacă p (ipoteza) atunci q (concluzia)*, putem presupune concluzia p ca fiind falsă și apoi împreună cu ipoteza p construim un raționament care conduce la contradicție.

Metoda inducției matematice: Se aplică pentru propoziții de forma: *Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, are loc $p(n)$* , unde $p(n)$ reprezintă un enunț care depinde de variabila n . Se verifică valoarea de adevăr a propoziției obținute în cazul $n = n_0$, se presupune ca fiind adevărată propoziția obținută în cazul $n = k$ și se demonstrează valoarea de adevăr a propoziției obținute pentru $n = k + 1$.

1.1.2. Mulțimi și cardinale

Teoremă: Orice mulțime A cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, admite 2^n submulțimi.

Definiție: Pentru o mulțime finită A , numim **cardinalul** său și notăm $\text{Card}(A)$ ca fiind numărul său de elemente.

Proprietăți: Sunt adevărate următoarele proprietăți:

P1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$;

P2. $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \cdot \text{Card}(B)$.

1.1.3. Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$

Definiție: Numim **modulul** unui număr real x și notăm $|x|$ ca fiind distanța de la originea axelor la poziția numărului pe axă.

Proprietățile modulului:

- P1.** $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$ **P2.** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$ **P3.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y;$
P4. $|x| < c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c);$ **P5.** $|x| > c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty);$
P6. $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};$ **P7.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R};$
P8. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*;$ **P9.** $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Definiție: Numim **parte întreagă** a numărului real x și notăm $[x]$ ca fiind cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x .

Proprietățile părții întregi: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

- P1.** $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$ **P2.** $[x] = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in [k, k+1).$

Definiție: Numim **parte fracționară** a numărului real x și notăm $\{x\}$ ca fiind diferența dintre număr și partea sa întreagă.

Proprietățile părții fracționare: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

- P1.** $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$ **P2.** $\{x\} \in [0, 1).$

1.2. PROBLEME DE ÎNȚIERE

- 11.** Determinați numărul de submulțimi ale mulțimii $A = \{a, b, c\}$.
12. Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$.
13. Reuniunea a două mulțimi, cu câte 20 de elemente fiecare, are 31 de elemente. Determinați numărul de elemente comune ale celor două mulțimi.
14. Demonstrați că $(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 \in \mathbb{N}$.
15. Arătați că numărul $a = (-5) \cdot [0, (4) + 0, 1(5)]$ este întreg.
16. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ dacă avem egalitatea de intervale $[a - b; a + b] = [1; 7]$.
17. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați cardinalul mulțimii:
 $B = \{x = (a - 1)(a - 2)(a - 3) + 4 \mid a \in A\}$.
18. Determinați intersecția mulțimilor $A = (1, 5)$ și $B = [3, 11]$.
19. Determinați partea întreagă a numărului $b = 2,13 + 1,88$.
110. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x - 2| = 5$.

1.3. PROBLEME DE CONSOLIDARE

- C1.** Fie mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui A care îl conțin pe d .

C18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|1 - 2x| = |x + 4|$.

C19. Demonstrați că $|2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}|$ este număr natural.

C20. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $|3x - 2| = 11$.

C21*. Calculați $\left[\frac{17}{5}\right] + \left\{\frac{11}{6}\right\}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

C22*. Determinați partea întreagă a numărului $a = \sqrt{17}$.

C23*. Determinați partea fracționară a numărului $b = \sqrt{25} + \sqrt{26}$.

C24*. Se consideră numărul $A = \sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$. Demonstrați că $A \in \mathbb{N}$.

C25*. Arătați că $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$ este număr natural.

C26*. Demonstrați că $[\sqrt{3} + \sqrt{25}] = [\sqrt{4} + \sqrt{19}]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

C27*. Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

C28*. Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

C29*. Demonstrați că numărul $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ este irațional.

C30*. Arătați că, pentru orice număr natural nenul n , fracția $\frac{2n-1}{2n+1}$ este ireductibilă.

1.4. TESTE DE VERIFICARE

Testul 1

1. Determinați elementele mulțimii $A \cap B$ dacă $A = (2003, 2015)$ și $B = (2014, 2016)$.

2. Calculați suma $|-3| + |-5| \cdot 2$.

3. Demonstrați că $\sqrt{4} + \sqrt{36} = \sqrt{64}$.

4. Câte submulțimi ale mulțimii $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ conțin doar numere impare?
5. Ordonăți crescător numerele $a = \sqrt{4} - 4$, $b = \sqrt{9} - 9$ și $c = \sqrt{16} - 16$.
6. Demonstrați că numărul $A = (2 + \sqrt{5})^2 + (2 - \sqrt{5})^2$ este natural.

Testul 2*

1. Determinați cel mai mic număr întreg al mulțimii $A \cap B$, dacă $A = (2010, 2016)$ și $B = (2013, 2020)$.
2. Determinați partea întreagă a numărului $x = \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\|2x - 1| - 3| = 5$.
4. Comparați numerele $a = 5\sqrt{3}$ și $b = 3\sqrt{7}$.
5. Fie numărul rațional $\frac{5}{4} = \overline{1, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}$. Calculați suma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2014}$.
6. Demonstrați prin inducție matematică că egalitatea $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Testul 3

1. Rezultatul calculului următor $1,2^2 - 1,1 \cdot 1,3$ este:
 A. 0,1; B. -0,1; C. 0,01; D. -0,01.
2. Partea întreagă a numărului $x = -\sqrt{13}$ este egală cu:
 A. -3; B. -4; C. 3; D. 4.
3. Fie $A = (5; 11)$ și $B = [7; 12]$. Cel mai mare număr al mulțimii $A \cap B$ este:
 A. 9; B. 12; C. 11; D. 10.
4. Numărul de elemente al mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x = -\frac{3}{2n-1}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ este:
 A. 2; B. 4; C. 0; D. 1.
5. Valoarea numărului natural a din relația $0,5 + 0,(3) + 1,1(6) = \frac{a}{2020}$ este:
 A. 2020; B. 2; C. 1010; D. 4040.
6. Soluția ecuației $|2x - 1| = 7$ este inclusă în intervalul:
 A. $(-4; 4)$; B. $(-3; 5)$; C. $(-4; 5)$; D. $(-3; 4)$.

6. Vectori în plan

6.1. NOȚIUNI TEORETICE

6.1.1. Generalități

Vectorul $\overrightarrow{AB}$ este caracterizat de

- direcția dreptei AB
- sensul de la A la B
- modulul egal cu lungimea segmentului $[AB]$

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au aceeași direcție dacă dreptele suport sunt paralele sau suprapuse. Spunem că vectorii sunt **coliniari** și notăm $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt **egali** dacă au aceeași direcție, același sens și același modul. Notăm $\vec{u} = \vec{v}$.

6.1.2. Adunarea vectorilor

Regula paralelogramului: Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Regula triunghiului: Pentru orice puncte A, B, C , avem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Proprietăți: Adunarea vectorilor este asociativă, comutativă, are element neutru vectorul nul $\vec{0}$ și simetrizabilă. Simetricul vectorului $\vec{u}$ se notează $-\vec{u}$ și se numește **vectorul opus**. În particular, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Scăderea vectorilor: Avem $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

6.1.3. Înmulțirea vectorilor cu scalar

Definiție: Fiind dat numărul real α și vectorul $\vec{u}$, vectorul $\alpha\vec{u}$ are aceeași direcție cu $\vec{u}$, același sens dacă $\alpha > 0$, respectiv sens opus dacă $\alpha < 0$ și modulul egal cu $|\alpha||\vec{u}|$.

Proprietăți: Înmulțirea vectorilor cu scalar este distributivă în raport cu adunarea vectorilor.

Teoremă: Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari dacă și numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

6.1.4. Relații vectoriale fundamentale

V1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ este paralelogram.

V2. Punctul M este mijlocul segmentului $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$, pentru orice punct P din planul triunghiului.

V3. Punctul $N \in [AB]$ pentru care $\frac{NA}{NB} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{PN} = \frac{\overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PB}}{1+k}$, pentru orice punct P din planul triunghiului.

V4. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}$, pentru orice P din planul triunghiului.

6.2. PROBLEME DE ÎNȚIERE

- I1.** Fie M mijlocul segmentului AB . Determinați valoarea numărului real x , pentru care $\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.
- I2.** Fie $ABCD$ un dreptunghi. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
- I3.** Fie $ABCD$ un pătrat de latură 2. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- I4.** Într-un plan se consideră punctele A, B, C și D . Demonstrați că:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}.$$
- I5.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
- I6.** Fie O intersecția diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Demonstrați că:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$
- I7.** Fie $ABCD$ un paralelogram și $x, y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD} = \vec{0}$. Demonstrați că $x = y$.
- I8.** Fie $ABCD$ un dreptunghi în care $AB = 6$ și $AD = 8$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- I9.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Determinați $x \in \mathbb{R}$, dacă $\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
- I10.** Fie dreptunghiul $ABCD$ și $M, N \in (AB)$, astfel încât $AM = MN = NB$. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{CD}$.

6.3. PROBLEME DE CONSOLIDARE

- C1.** Într-un plan se consideră punctele M, N și P . Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM}$.
- C2.** Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, CA ale triunghiului ABC . Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.
- C3.** Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, CA ale triunghiului ABC . Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$.
- C4.** Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC . Determinați valoarea numărului x pentru care $\overrightarrow{GA} + x\overrightarrow{GM} = \vec{0}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului.

- C21***. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Demonstrați că $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \vec{0}$.
- C22***. Fie $ABCD$ un paralelogram, iar O intersecția diagonalelor. Fie M și N mijloacele laturilor AB și, respectiv, CD . Arătați că $\overline{OM} + \overline{ON} = \vec{0}$.
- C23***. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de centru O . Atunci:

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF} = \vec{0}.$$
- C24***. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 5. Determinați modulul vectorului $\overline{AC} - \overline{BD}$.
- C25***. Fie triunghiul ABC , M mijlocul laturii BC , N mijlocul medianei AM , iar P un punct pe latura AC , astfel încât $PC = 2PA$. Demonstrați că punctele B , N și P sunt coliniare.
- C26***. Fie $ABCD$ un romb cu $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$. Demonstrați că vectorii $\overline{AB} - \overline{AD}$ și $\overline{CD}$ au același modul.
- C27***. Fie ABC un triunghi, M mijlocul laturii BC și P mijlocul laturii AC . Demonstrați că vectorii $\vec{u} = \overline{BA} + \overline{BC}$ și $\vec{v} = \overline{MC} + \overline{MP}$ sunt coliniari.
- C28***. Considerăm patrulaterul $MNPQ$ și S mijlocul laturii MN , iar T mijlocul laturii PQ . Demonstrați că $\overline{MQ} + \overline{NP} = 2\overline{ST}$.
- C29***. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Demonstrați că $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{FE} + \overline{ED}$.
- C30***. Considerăm un pătrat $ABCD$ de centru O și latură $AB = 6$. Calculați modulul vectorului $\overline{AB} + \overline{AO} + \overline{AD}$.

6.4. TESTE DE VERIFICARE

Testul 1

1. Fie $ABCD$ un paralelogram și M mijlocul lui AB , iar N mijlocul lui CD . Demonstrați că $\overline{AM} + \overline{CN} = \vec{0}$.
2. Fie M mijlocul segmentului $[AB]$ și punctul P mijlocul segmentului $[AM]$. Demonstrați că $\overline{PA} + \frac{1}{3}\overline{PB} = \vec{0}$.
3. Fie ABC un triunghi echilateral de latură $AB = 6$. Fie M mijlocul laturii $[BC]$. Calculați modulul segmentului $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}$.
4. În patrulaterul $ABCD$ notăm cu M , N , P și Q mijloacele laturilor AB , BC , CD și, respectiv, DA . Demonstrați că $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} + \overline{DQ} = \vec{0}$.
5. În paralelogramul $ABCD$, vectorii $\overline{CB} + \overline{CD}$ și $\overline{DA} + \overline{DC}$ au module egale. Demonstrați că $ABCD$ este dreptunghi.
6. În plan considerăm punctele M , N , P , Q astfel încât $\overline{MN} + \overline{PQ} = \overline{MQ}$. Demonstrați că punctele N și P coincid.

Clasa a X-a

1. Numere reale

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Radicali

Definiție: Numim **radical** de ordin $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, din numărul pozitiv a și notăm $\sqrt[n]{a}$ ca fiind acel număr pozitiv x unic cu proprietatea $x^n = a$.

Observație: Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, dacă $\sqrt[n]{x} \notin \mathbb{N}$, atunci $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proprietățile radicalului: Următoarele relații sunt adevărate pentru orice $a, b \geq 0$ și $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 2$.

P1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;

P2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$;

P3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^p}$;

P4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

Observație: Dacă n este impar, putem calcula $\sqrt[n]{x}$ și dacă $x < 0$. În aceste condiții $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

Observație: Avem $(\sqrt[n]{x})^n = x$, dar $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & n \text{ este impar} \\ |x|, & n \text{ este par} \end{cases}$.

1.1.2. Puteri cu exponent real

Observație: Noțiunea de ridicare la putere se poate generaliza astfel:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}^*; x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, x \geq 0, n \in \mathbb{N}^*; x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, x \geq 0, m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Proprietățile ridicării la putere: Pentru orice $x, y > 0$ și orice $p, r \in \mathbb{R}$, au loc relațiile:

P1. $x^p x^q = x^{p+q}$;

P2. $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$;

$$\text{P3. } (x^p)^q = x^{pq};$$

$$\text{P4. } (xy)^p = x^p y^p.$$

1.1.3. Logaritmi

Definiție. Fie $a, b > 0, a \neq 1$. Soluția (unică) a ecuației $a^x = b$ se numește **logaritm în baza a din b** și se notează cu $\log_a b$.

Proprietățile logaritmului: Logaritmul are următoarele proprietăți valabile pentru orice $a, b, x, y > 0, a, b \neq 1$:

$$\text{P1. } \log_a xy = \log_a x + \log_a y;$$

$$\text{P2. } \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\text{P3. } \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\text{P4. } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Observație: Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ sunt numere prime diferite, atunci $\log_a b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2. PROBLEME DE ÎNȚIERE

$$\text{I1. } \text{Calculați } (-1)^5 + (-2)^4 + (-3)^3 + (-4)^2 + (-5).$$

$$\text{I2. } \text{Calculați } (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{100}.$$

$$\text{I3. } \text{Calculați } 8^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

$$\text{I4. } \text{Calculați } \sqrt[3]{125} + \sqrt{16} + \sqrt[3]{-27}.$$

$$\text{I5. } \text{Calculați } \log_{11} 11 + \log_7 \frac{1}{7}.$$

$$\text{I6. } \text{Calculați } \log_3 81 + \log_5 25 - \lg 100000.$$

$$\text{I7. } \text{Ordonăți crescător numerele } a = -\sqrt[3]{27}, b = \log_2 \frac{1}{16}, c = -2.$$

$$\text{I8. } \text{Demonstrați că } \log_4 64 + \sqrt[3]{1000} = \sqrt{16} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}.$$

$$\text{I9. } \text{Demonstrați că } \log_{11} 121 < \sqrt[3]{27}.$$

$$\text{I10. } \text{Dacă } \log_2 3 = a, \text{ demonstrați că } \log_2 6 = 1 + a.$$

1.3. PROBLEME DE CONSOLIDARE

$$\text{C1. } \text{Calculați } \sqrt{18} - \sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{72}.$$

$$\text{C2. } \text{Arătați că } 2\sqrt{14} - \sqrt{\frac{7}{2}} - 5\sqrt{\frac{8}{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

- C3.** Demonstrați că $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{250}$.
- C4.** Demonstrați egalitatea $\sqrt[3]{\sqrt{729}} - \sqrt[3]{\sqrt{64}} = 1$.
- C5.** Dacă $\lg 3 = a$, demonstrați că $\lg 90 = 2a + 1$.
- C6.** Demonstrați că $\log_2 12 + \log_2 14 - \log_2 21 = 3$.
- C7.** Arătați că numărul $a = \log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27}$ este natural.
- C8.** Demonstrați că $\lg \frac{2}{1} + \lg \frac{3}{2} + \dots + \lg \frac{10}{9} \in \mathbb{N}$.
- C9.** Demonstrați că $1331^{\frac{2}{3}} \in \mathbb{N}$.
- C10.** Comparați numerele $a = 2^{33}$ și $b = 3^{22}$.
- C11.** Comparați numerele $3\sqrt{2008}$ și $2008\sqrt{3}$.
- C12.** Calculați $b - a$, unde $a = \log_2 3$ și $b = \log_2 6$.
- C13.** Calculați $\lg 12 + \lg 15 - \lg 18$.
- C14.** Demonstrați că $\log_4 9 = \log_8 27$.
- C15.** Demonstrați că $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 = 3$.
- C16.** Demonstrați că numărul $a = \log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{2}$ este rațional.
- C17.** Demonstrați că numărul $\log_2(5 + \sqrt{7}) + \log_2(5 - \sqrt{7}) - 2\log_2 3$ este întreg.
- C18.** Demonstrați că $\log_{2\sqrt{2}} 3\sqrt{3} = \log_2 3$.
- C19.** Comparați numerele $\log_5 2007$ și 4.
- C20.** Demonstrați că $\log_8 512 + \sqrt[3]{512} > \sqrt{121} - \log_{11} 121$.
- C21*.** Se consideră numerele $a = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ și $b = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Arătați că $\frac{b}{a} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
- C22*.** Determinați $a, b \in \mathbb{Q}$, știind că $(1 + \sqrt{2})^2 = a + b\sqrt{2}$.
- C23*.** Arătați că $\frac{3}{2} < \log_2 3 < 2$.
- C24*.** Demonstrați că $\sqrt{3} + \sqrt{9} < \sqrt{5} + \sqrt{7}$.
- C25*.** Demonstrați că $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.
- C26*.** Demonstrați că $2 \in (\log_3 4, \sqrt{5})$.
- C27*.** Demonstrați că $\log_3 5 \cdot \log_5 9 < \sqrt[3]{9}$.
- C28*.** Demonstrați că $100^{\lg 2} + \sqrt[3]{-27} > 0$.
- C29*.** Dacă $\log_3 2 = a$, demonstrați că $\log_{12} 18 = \frac{a+2}{2a+1}$.
- C30*.** Demonstrați că $\log_3 7 > \log_7 3$.

1.4. TESTE DE VERIFICARE**Testul 1**

1. Demonstrați că $\sqrt{49} + \sqrt[3]{-1000} + (\sqrt{3})^2 = 0$.
2. Demonstrați că numărul $a = \frac{\sqrt{50} + \sqrt{18}}{\sqrt{32} - \sqrt{8}}$ este natural.
3. Demonstrați că $\lg 20 + \lg 50 = 3$.
4. Demonstrați că $\log_3 5 + \log_3 7 < \log_3 72 - \log_3 2$.
5. Ordonăți crescător numerele $a = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$, $b = \sqrt[3]{-125}$ și $c = \lg \frac{1}{1000}$.
6. Demonstrați că $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}$.

Testul 2*

1. Demonstrați că $\sqrt[3]{-216} + \sqrt{144} = \log_3 729$.
2. Demonstrați că $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{2}{\log_9 4} - \frac{3}{\log_{27} 8} = 0$.
3. Demonstrați că numerele $a = 10^{\lg 7}$ și $b = \sqrt[3]{343}$ sunt egale.
4. Arătați că numărul $a = \log_{25} 100 \cdot \log_{16} 25 - 2 \log_{16} 5$ este rațional.
5. Demonstrați că $\log_{11} 3 \cdot \log_7 5 = \log_7 3 \cdot \log_{11} 5$.
6. Demonstrați că $\sqrt{10} + \sqrt{12} < 7$.

Testul 3

1. Cel mai mic număr natural n care verifică relația $\sqrt[3]{31} < n$ este:
A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.
2. Fie $a = \log_3 63 - \log_3 7$. Atunci:
A. $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; B. $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; C. $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; D. $a \in \mathbb{N}$.
3. Valoarea numărului rațional x din egalitatea $2^x = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{5}{9}}$ este:
A. $\frac{1}{3}$; B. $\frac{5}{3}$; C. $\frac{7}{3}$; D. $\frac{8}{3}$.
4. Dintre numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\log_3 10$ și $\log_4 15$ este mai mare decât 2 numărul:
A. $\sqrt{2}$; B. $\sqrt[3]{3}$; C. $\log_3 10$; D. $\log_4 15$.